Transitions de phase dans le plan hyperbolique, application à la détection des textures par le cortex visuel primaire

Pascal Chossat

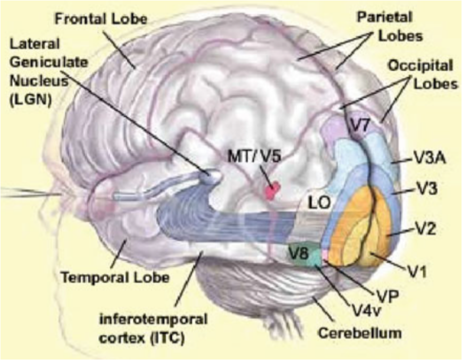
Géométrie et représentation de la couleur

Atelier GDR ISIS, IMJ-PRG

21 Novembre 2018

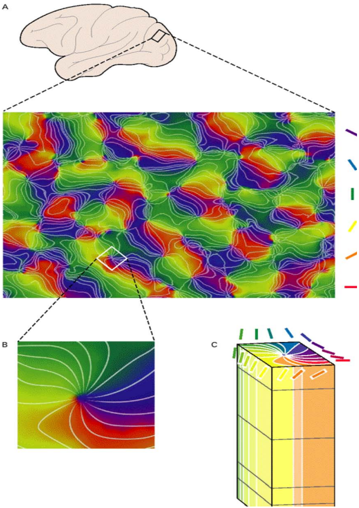
UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR
cnrs
Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Le cortex visuel primaire



Chaque neurone de $V1$ répond à une zone spécifique du plan visuel R où il définit un profil récepteur $\varphi(x, y)$ qui détecte des propriétés locales de l'image : orientation des contours, contraste, fréquence spatiale...

Les hypercolonnes d'orientation de $V1$



- Les orientations s'organisent autour de points singuliers (pinwheels).
- Réseau des pinwheels $\sim$ périodique $\rightarrow$ réseau cristallin d'hypercolonnes.
- 360° autour du pinwheel = variation de 180° de l'orientation.
- Cette structure est idéalisée par un fibré des orientations $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1 \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.
- Le groupe euclidien $E(2, \mathbf{R})$ agit sur le fibré par $(\mathbf{t}, r_\phi)(\mathbf{x}, \theta) = (r_\phi \mathbf{x} + \mathbf{t}, \theta + \phi)$ et $\kappa(\mathbf{x}, \theta) = (\bar{\mathbf{x}}, -\theta)$.
- Cf J. Petitot : *Neurogéométrie de la vision* 2008

Modèle de Bressloff-Cowan pour la détection des contours

Equation de Wilson-Cowan pour le potentiel d'action (moyenné) dans $V1$:

$$(*)\ \frac{dv(\mathbf{x},\theta,t)}{dt} = -v(\mathbf{x},\theta,t) + \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{\pi} w(\mathbf{x},\theta;\mathbf{x}',\theta')S(v(\mathbf{x}',\theta',t))d\theta' d\mathbf{x}' + I_{ext}$$

- $S(v) =$ taux de décharge du neurone (fonction sigmoïde). $I_{ext} =$ input.
- $w =$ fonction de couplage synaptique entre neurones.
  $w = h(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|, |\theta-\theta'|) \Rightarrow (*)$ est invariante par l'action de $E(2,\mathbb{R})$ sur le fibré des orientations.

Modèle de Bressloff-Cowan pour la détection des contours

Equation de Wilson-Cowan pour le potentiel d'action (moyenné) dans $V1$:

$$(*)\ \frac{dv(\mathbf{x},\theta,t)}{dt} = -v(\mathbf{x},\theta,t) + \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^\pi w(\mathbf{x},\theta;\mathbf{x}',\theta')S(v(\mathbf{x}',\theta',t))d\theta' d\mathbf{x}' + I_{ext}$$

- $S(v)$ = taux de décharge du neurone (fonction sigmoïde). I_{ext} = input.
- w = fonction de couplage synaptique entre neurones.
  $w = h(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|, |\theta-\theta'|) \Rightarrow (*)$ est invariante par l'action de $E(2,\mathbb{R})$ sur le fibré des orientations.

Activation spontanée d'images dans $V1$

1. Absence de stimulus externe : $I_{ext} = 0$.
2. $\exists$ état de base homogène v_0 unique et stable lorsque $S'(v_0) = \mu < \mu_c$ et instable quand $\mu > \mu_c$ ($\rightarrow$ bifurcation).
3. Symétries $\Rightarrow$ bifurcation d'états stationnaires cristallographiques.
4. Application à la formation d'hallucinations visuelles sous l'effet de drogues (Bressloff-Golubitsky 2001)...

La modélisation de $V1$ par le tenseur de structure

Olivier Faugeras, P.C. (Plos Comp Bio 2009) : les hypercolonnes de V1 encodent le tenseur de structure de l'image.

La modélisation de $V1$ par le tenseur de structure

Olivier Faugeras, P.C. (Plos Comp Bio 2009) : les hypercolonnes de V1 encodent le tenseur de structure de l'image.

Définition

Soit g_σ la gaussienne 2D d'écart-type σ.
$I_{\sigma_1} = I * g_{\sigma_1}$ (signal filtré à l'échelle σ_1).

Le tenseur de structure au point (x, y) est la matrice symétrique definie positive

$$\mathcal{T}(x, y) = g_{\sigma_2} * \left(\nabla I_{\sigma_1} {}^t\nabla I_{\sigma_1} \right)$$

σ_2 definit l'échelle caractéristique de la texture.

Ce modèle a été étudié dans une série d'articles avec Gregory Faye (CNRS, U. of Toulouse), cf sa thèse https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00850269.

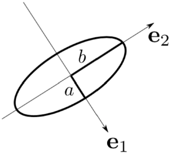
Propriétés du tenseur de structure

Valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, de vecteurs propres $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$.

$\mathcal{T} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_1\,{}^t\mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{I}_2$.

- $\lambda_1 \approx \lambda_2 \Rightarrow$ image isotrope
- $\lambda_1 \gg \lambda_2 \approx 0 \Rightarrow$ bord rectiligne le long de $\mathbf{e}_2$
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \gg 0 \Rightarrow$ coin
- La taille de λ_j definit le contraste le long de $\mathbf{e}_j$
- Orientation de $\mathbf{e}_2 =$ orientation préférentielle du neurone

<u>ellipse $\mathbf{x}\mathcal{T}\,{}^t\mathbf{x} = 1$</u>



$(a = 1/\sqrt{\lambda_1},\ b = 1/\sqrt{\lambda_2})$

Structure riemannienne sur l'espace des tenseurs de structure

$\{\mathcal{T}\} = \mathrm{SPD}(2) \simeq \mathrm{Q}^+ = \{\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}\mathcal{T}\mathbf{x} > 0\}$.

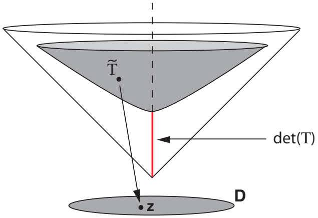
Choix naturel d'une métrique : $\rho_{\mathcal{T}}(A, B) = tr(\mathcal{T}^{-1}A\mathcal{T}^{-1}B) \rightarrow$ groupe d'isométries $GL(2, \mathbb{R})$ (invariance par changements de coordonnées affines).

Structure riemannienne sur l'espace des tenseurs de structure

$\{\mathcal{T}\} = \mathrm{SPD}(2) \simeq \mathrm{Q}^+ = \{ {}^t\mathbf{x}\mathcal{T}\mathbf{x} > 0\}$.
Choix naturel d'une métrique : $\rho_{\mathcal{T}}(A, B) = tr(\mathcal{T}^{-1}A\mathcal{T}^{-1}B) \rightarrow$ groupe d'isométries $GL(2, \mathbb{R})$ (invariance par changements de coordonnées affines).

Formulation équivalente :
$\mathrm{SPD}(2) = \mathbb{R}_*^+ \times \{\det(\mathcal{T}) = 1\} \simeq \mathbb{R}_*^+ \times \mathrm{H}^2$.
$H^2 \simeq$ disque de Poincaré $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$
$\Rightarrow \mathrm{SPD}(2) \simeq \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{D}$.

$$d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \sqrt{2\log^2\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right) + \operatorname{artanh}^2 \frac{|z - z'|}{|1 - \bar{z}z'|}}$$



Structure riemannienne sur l'espace des tenseurs de structure

$\{\mathcal{T}\} = \mathrm{SPD}(2) \simeq \mathrm{Q}^+ = \{ {}^t\mathbf{x}\mathcal{T}\mathbf{x} > 0\}.$

Choix naturel d'une métrique : $\rho_{\mathcal{T}}(A, B) = tr(\mathcal{T}^{-1}A\mathcal{T}^{-1}B) \rightarrow$ groupe d'isométries $GL(2, \mathbb{R})$ (invariance par changements de coordonnées affines).

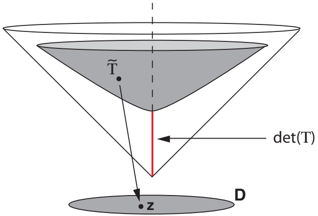
Formulation équivalente :

$\mathrm{SPD}(2) = \mathbb{R}_*^+ \times \{\det(\mathcal{T}) = 1\} \simeq \mathbb{R}_*^+ \times \mathrm{H}^2.$

$H^2 \simeq$ disque de Poincaré $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$

$\Rightarrow \mathrm{SPD}(2) \simeq \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{D}.$

$$d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \sqrt{2\log^2(\frac{\Delta}{\Delta'}) + \operatorname{artanh}^2 \frac{|z - z'|}{|1 - \bar{z}z'|}}$$



Group d'isométries $\mathbb{R}_*^+ \times U(1,1)$, où $U(1,1) = SU(1,1) \cup \kappa SU(1,1)$ agit dans $\mathbb{D}$ par $\gamma z = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1,$ et réflexion $\kappa z = \bar{z}$.

Détection des textures avec le tenseur de structure

Fibré des textures : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{D} \ni (\mathbf{x}, \Delta, z)$.

L'équation du champ des potentiels moyennés devient

$$(*)\ \frac{\partial v}{\partial t} = -v + \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{D}} w(\mathbf{x}, \Delta, z; \mathbf{x}', \Delta', z') S(v(\mathbf{x}, \Delta', z', t)) dx' d\Delta' \frac{dz'}{(1 - |z|^2)^2} + I_{ext}$$

Détection des textures avec le tenseur de structure

Fibré des textures : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{D} \ni (\mathbf{x}, \Delta, z)$.

L'équation du champ des potentiels moyennés devient

$$(*)\ \frac{\partial v}{\partial t} = -v + \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{D}} w(\mathbf{x},\Delta,z;\mathbf{x}',\Delta',z')S(v(\mathbf{x},\Delta',z',t))dx'd\Delta'\frac{dz'}{(1-|z|^2)^2} + I_{ext}$$

En négligeant les composantes dans $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ and $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$, $(*)$ devient

$$(**)\quad \frac{\partial v}{\partial t} = -v\ + \int_{\mathbb{D}} w(z;z')S(v(z',t))\frac{dz'}{(1-|z|^2)^2}\ +\ I_{ext}.$$

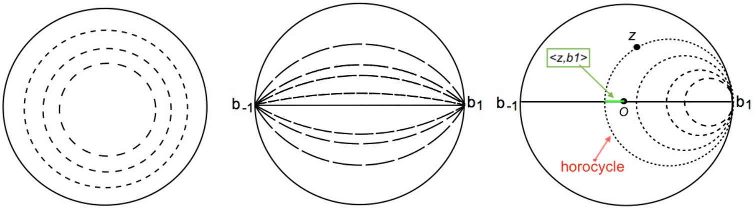
Il est naturel de supposer que $w(z,z') = h(d_{\mathbb{D}}(z,z'))$.

Faye-C.-Faugeras, JMN (2011) :
(i) $(**)$ possède une solution stationnaire homogène v_0 ;
(ii) $\exists \mu_c > 0$ tel que $S'(v_0) = \mu < \mu_c \Rightarrow v_0$ est unique et stable (état de base).

Question : que se passe-t-il si $\mu > \mu_c$? (problème de bifurcation...).

Analyse harmonique et spectrale dans $\mathbb{D}$

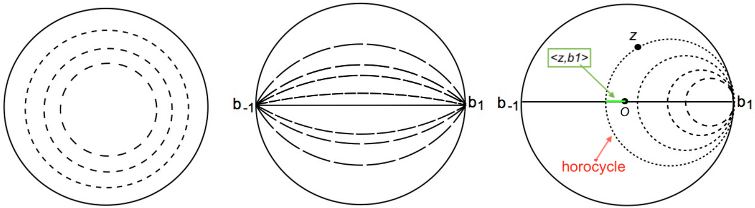
- Théorème d'Iwasawa : $SU(1,1) = KAN$ où K, A, N sont des sous-groupes à 1 paramètre d'orbites



rotations | transf. hyperboliques | transf. paraboliques

Analyse harmonique et spectrale dans $\mathbb{D}$

- Théorème d'Iwasawa : $SU(1,1) = KAN$ où K, A, N sont des sous-groupes à 1 paramètre d'orbites



rotations | transf. hyperboliques | transf. paraboliques

- Analyse harmonique dans $\mathbb{D}$ (Helgason, *Groups & Geometric Analysis* 2000).

  Soit $e_{\rho,b}(z) = e^{(i\rho+1)\langle z,b\rangle}$, $\rho \in \mathbb{C}$, $b \in \partial\mathbb{D}$, et $\langle z, b\rangle$ comme ci-dessus. Alors

$$-\triangle_{\mathbb{D}}\, e_{\rho,b} = (\rho^2 + 1)e_{\rho,b}$$

$\rightarrow$ "transformée de Fourier" $\tilde{f}(\rho, b) = \int_{\mathbb{D}} f(z)e_{\rho,b}(z)(1 - |z|^2)^{-2}dz$.

Activation spontanée de motifs dans $\mathbb{D}$: $I_{ext} = 0$

Très différent du cas (classique) des transitions de phase dans le plan Euclidien !

Nous avons étudié 3 types de bifurcations à partir de l'état de base de $(**)$, cf P.C.-G. Faye JDDE (2015) pour une revue dans le contexte EDP.

(i) Ondes progressives périodiques avec une source à l'∞ (*i.e.* sur $\partial\mathbb{D}$) : solutions invariantes par les transformations paraboliques de N.

(ii) Etats stationnaires invariants par l'action d'un sous-groupe discret de transformations hyperboliques dont le domaine fondamental est compact (solutions "H-périodiques").

(iii) Etats stationnaires localisée : invariants par rotations dans K et décroissant exponentiellement à l'∞.

Les cas (ii) and (iii) nécessitent une analyse approfondie, particulièrement (ii) qui s'appuie sur la théorie des groupes fuchsiens et des fonctions, automorphes et sur la théorie des bifurcations équivariantes.

Je décris brièvement le cas (i).

Bifurcation d'ondes périodiques progressives dans $\mathbb{D}$

- v_0 état de base homogène, $\mu = S'(v_0)$ paramètre de bifurcation.
- Coordonnées horocycliques : $z = n_s a_\tau O$ avec $n_s \in N$, $a_\tau \in A$, $s, \tau \in \mathbb{R}$.
- En cherchant des solutions $v(t, a_\tau O) = v_0 + u(t, \tau)$, le problème se ramène à

$$\partial_t u = -u(t,\tau) + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} w(a_{\tau-\tau'} O, n_x O) dx \right)}_{\chi(\tau-\tau')} S(u(t,\tau')) d\tau'$$

- On restreint l'analyse aux fonctions τ-periodiques :
$u(t,\tau) = u(t, \tau + 2\pi/\alpha)$

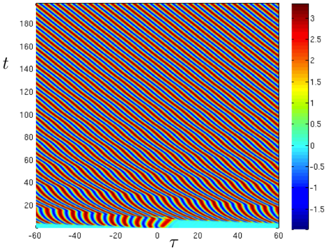
Bifurcation d'ondes périodiques progressives dans $\mathbb{D}$

- v_0 état de base homogène, $\mu = S'(v_0)$ paramètre de bifurcation.
- Coordonnées horocycliques : $z = n_s a_\tau O$ avec $n_s \in N$, $a_\tau \in A$, $s, \tau \in \mathbb{R}$.
- En cherchant des solutions $v(t, a_\tau O) = v_0 + u(t, \tau)$, le problème se ramène à

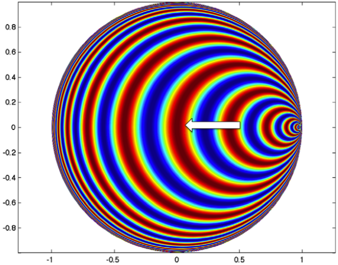
$$\partial_t u = -u(t,\tau) + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} w(a_{\tau-\tau'}O, n_x O) dx \right)}_{\chi(\tau-\tau')} S(u(t,\tau'))d\tau'$$

- On restreint l'analyse aux fonctions τ-periodiques : $u(t,\tau) = u(t, \tau + 2\pi/\alpha)$
- $e_{\rho,b_1}(a_\tau O) = e^{(i\rho+1)\tau}$, periodique si $\rho = \alpha + i$ (periode $2\pi/\alpha$).
- Pb aux valeurs propres : $\sigma e^{i\alpha\tau} = -e^{i\alpha\tau} + \mu\chi \star e^{i\alpha\tau'}$.
  Transformée de Fourier $\rightarrow \sigma = -1 + \mu\tilde{\chi}(\alpha)$.
- $\exists\ \mu_c, \alpha_c$ t.q. $\sigma = \pm i\omega_0$ et toutes les autres vp ont une partie réelle < 0.
  D'où bifurcation de Hopf vers des ondes périodiques progressives.

A quoi ressemblent ces ondes périodiques progressives



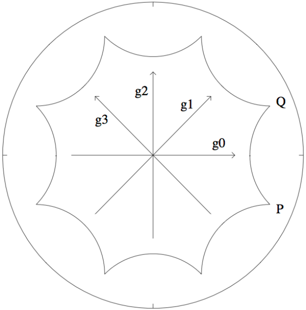
(a)



(b)

Bifurcation de solutions H-périodiques : un exemple

- $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ octogone d'aire 4π.
- Γ groupe engendré par les transformations hyperboliques $g_0, \ldots, g_4$.
- $\mathbb{D}/\Gamma \simeq$ tore à 2 trous (genre 2).
- Groupe des isométries sur $\mathbb{D}/\Gamma$: $G_{\mathcal{O}} = H_{\mathcal{O}} \cup \kappa H_{\mathcal{O}}$ où $\kappa : z \to \bar{z}$ et $H_{\mathcal{O}} \simeq GL(2,3)$ ($|H_0| = 48$).



$\to$ problème de bifurcation avec symétries $G_{\mathcal{O}}$ pour l'équation $(**)$ dans $L^2(\mathbb{D}/\Gamma)$ $\to$ spectre discret, vp de multiplicité finie $\to$ réduction à la variété centrale s'applique.

Difficulté : les harmoniques Γ-invariantes ne sont pas explicitement connues $\to$.

Un échantillon de solutions H-périodiques