Une relecture quantique de Resnikoff

GDR ISIS 2018

M. Berthier

-

Mathématiques de la perception.

- “Au contraire, les occasions qui peuvent faire naître les concepts dont les modes de détermination forment une variété continue sont si rares dans la vie ordinaire, que **les lieux des objects sensibles et les couleurs** sont à peu près les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une variété de plusieurs dimensions” (Riemann, Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie).
- “The structure of our scientific cognition of the world is decisively determined by the fact that this world does not exist in itself, but is merely encountered by us as an object in the **correlative variance of subject and object**” (Weyl, Mind and nature).

L'espace abstrait des couleurs perçues : du riemannien au quantique.

- Axiome historique : cône convexe homogène de dimension 3 (Newton, Grassmann, Helmhotz).
- Modèle riemannien hyperbolique de Resnikoff, alternative au modèle plat $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}_+ \times SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$$

- Quantique 1 : cône convexe $\longleftrightarrow$ superposition d'états. "The idea is that a convex set is a set such that one can form mixtures of any pair of points in the set" (Bengtsson et al., Geometry of quantum states).
- Quantique 2 : algèbres de Jordan $\longleftrightarrow$ dualité états observables. Théorème de Koecher-Vinberg : correspondance biunivoque entre les algèbres de Jordan formellement réelles et les cônes symétriques (ouverts, convexes, auto-duaux, homogènes) : $C = \{a^2,\ a \in A\}$.
- Métamérisme : réduction de dimension $\longleftrightarrow$ auto-encodage. Similaire à l'ACP vue comme auto-encodeur à décodage linéaire (Goodfellow et al., Deep Learning).
- Référence perceptuelle adaptative : $(\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$.

Les algèbres de Jordan et les facteurs spin.

- Algèbres de Jordan : associatives non commutatives vs commutatives non associatives. A est un espace vectoriel réel muni d'un produit bilinéaire $\circ$ vérifiant
$$\mathsf{a} \circ \mathsf{b} = \mathsf{b} \circ \mathsf{a}, \; \mathsf{a}^2 \circ (\mathsf{a} \circ \mathsf{b}) = \mathsf{a} \circ (\mathsf{a}^2 \circ \mathsf{b})$$
- Le facteur spin : algèbre de Jordan $\mathcal{H}(2, \mathbb{R})$ de dimension 3 des matrices 2×2 réelles symétriques avec $\mathsf{a} \circ \mathsf{b} = (\mathsf{ab} + \mathsf{ba})/2$.
$$\mathcal{H}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$$
Sur $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, $(\mathsf{u}, \alpha) \circ (\mathsf{v}, \beta) = (\alpha \mathsf{v} + \beta \mathsf{u}, \langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle + \alpha\beta)$ et $(\mathsf{u}, \alpha) \cdot (\mathsf{v}, \beta) = \langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle - \alpha\beta$ (métrique de Minkowski). Les a de $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$ tels que $\mathsf{a} \cdot \mathsf{a} = 0$ forment le cône de lumière. Les rayons de lumière sont en bijection avec l'espace projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ des directions de $\mathbb{R}^2$ (tout rayon correspond à un élément du type $(\mathsf{u}, 1)/2$ avec u de norme 1).

Les algèbres de Jordan et les matrices de densité.

- Observables : éléments de $\mathcal{H}(2,\mathbb{R})$. Matrices de densité (états) : éléments de $\mathcal{H}^+(2,\mathbb{R})$ de trace 1. Les états sont des observables particuliers. Pour a dans $\mathcal{H}(2,\mathbb{R})$ et ρ matrice de densité

$$\langle \mathsf{a} \rangle_\rho = \mathsf{tr}(\rho \mathsf{a})$$

- Dans le modèle du facteur spin $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$: $\rho = (\mathsf{u}, 1)/2$, $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^2$ avec $\|\mathsf{u}\| \leq 1$.
- États purs : ρ avec $\rho^2 = \rho$ ou $\rho = (\mathsf{u}, 1)/2$ avec $\|\mathsf{u}\| = 1$. Les états purs correspondent à l'espace projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.
- L'état d'entropie maximale : l'identité de l'algèbre $\mathcal{H}(2,\mathbb{R})$ renormalisée : $\rho_0 = \mathsf{Id}/2$ ou $\rho_0 = (\mathbf{0}, 1)/2$.
- Le théorème de structure utilisé par Resnikoff : $\mathcal{H}^+(2,\mathbb{R})$ est feuilleté par des surfaces (espaces homogènes) $SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ sur lesquelles le déterminant est constant.

Les états des couleurs perçues.

- États purs : ce sont les couleurs primaires. L'espace $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est un "cercle". La teinte est la distance projective à partir d'un état pur de référence u_0

$$\mathsf{d}((\mathsf{u},1),(\mathsf{u}_0,1)) = 2\mathsf{arcos}|\langle \mathsf{u},\mathsf{u}_0\rangle|$$

- L'état d'entropie maximale ρ_0 est le "noir" ou "gris" de référence. La pureté d'un état $\rho = (\mathsf{u},1)$ se mesure à partir de la trace de ρ^2 ou de la norme du vecteur u, i.e. de la distance à l'état d'entropie maximale. *C'est la saturation.*
- **Rebit de Hering et disque de Bloch.** L'algèbre $\mathcal{H}(2,\mathbb{R})$ correspond à un système quantique **réel** à deux états (rebit) avec deux directions, e. g. bleu-jaune et vert-rouge. L'espace des états de ce rebit est le disque des états mixtes $\rho = (\mathsf{u},1)$, $\|\mathsf{u}\| \leq 1$, bordé par l'espace $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathsf{S}^1$ des états purs. *C'est la version réelle de la boule de Bloch qui est l'espace des états du spin dans $\mathbb{R}^3$ (qubit complexe) bordé par $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathsf{S}^2$ (l'algèbre utilisée est alors $\mathcal{H}(2,\mathbb{C})$).*

Percevoir les couleurs perçues...

- Métrique sur l'espace des états et indiscernabilité quantique : métrique de Fisher... métrique statistique de Wootters... métrique de Hilbert...
- Indiscernabilité et ellipses de McAdam...
- L'encodage et la R matrice de Cohen...
- ...